AULA 9

# E.D.O. lineares com coeficientes variáveis: Equação de Cauchy-Euler

**META:**

Descrever o método de resolução de um tipo especial de equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes variáveis: equação de Cauchy-Euler.

**OBJETIVOS:**

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Identificar as equações de Cauchy-Euler.

Resolver as equações de Cauchy-Euler.

**PRÉ-REQUISITOS**

Os conhecimentos da aula 6.

## 9.1 Introdução

Caros alunos, nesta aula aprenderemos como solucionar algumas equações lineares com coeficientes variáveis. Estas equações são tão importantes, se não mais, do que as equações lineares mais simples, ou seja, com coeficientes constantes. Veremos que no campo das equações lineares com coeficientes variáveis, os métodos de resolução vão se tornando cada vez mais escassos devido ao grau de complexidade de tais equações. A primeira equação linear com coeficientes variáveis que veremos será a equação de Cauchy-Euler, em seguida, veremos alguns métodos de resolução que utilizam séries de potências.

## 9.2 Equação de Cauchy-Euler

### 9.2.1 Equação de Cauchy-Euler de segunda ordem

Uma equação diferencial linear de segunda ordem da forma

$$a_2x^2\frac{d^2y}{dx^2} + a_1x\frac{dy}{dx} + a_0y = g(x), \qquad (9.52)$$

onde $a_2, a_1, a_0$ e $a_2 \neq 0$ são constantes é conhecida por **Equação de Cauchy-Euler**. Uma vez que a equação de Cauchy-Euler é um tipo de equação linear, sabemos que uma solução geral para tal equação será a soma $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$ da solução geral da equação homogênea associada com uma solução particular da equação não homogênea. Dessa maneira, estudemos primeiramente a equação homogênea associada, a qual é dada por

$$a_2x^2\frac{d^2y}{dx^2} + a_1x\frac{dy}{dx} + a_0y = 0. \qquad (9.53)$$

**Observação 9.1.** Observe que o termo de maior ordem da equação de Cauchy-Euler (9.52), $a_2x^2\frac{d^2y}{dx^2}$, se anula quando $x = 0$, dessa maneira para garantirmos as hipóteses do Teorema de existência e unicidade, Teorema 6.1, consideraremos $x \in I$, onde $I$ é um intervalo de $\mathbb{R}$ que não contém o zero. Consideraremos aqui $I = (0, \infty)$.

Suponhamos que a equação (9.53) admita uma solução da forma $y_m(x) = x^m$, então derivando e substituindo na equação, temos

$$a_2x^2\frac{d^2y_m}{dx^2}+a_1x\frac{dy_m}{dx}+a_0y_m = 0 \Leftrightarrow a_2x^2m(m-1)x^{m-2}+a_1xmx^{m-1}+a_0x^m = 0.$$

Assim, para que $y_m(x) = x^m$ seja solução de (9.53) basta que

$$[a_2m(m-1) + a_1m + a_0]x^m = 0.$$

Dessa maneira, uma vez que estamos considerando $x \in I$, onde $I$ não contém o zero, $y_m(x) = x^m$ é solução de (9.53) se, e somente se, $m$ for raiz da equação

$$[a_2m(m-1) + a_1m + a_0] = 0. \tag{9.54}$$

Chamamos tal equação de **equação auxiliar ou equação indicial** de (9.53). Na resolução da equação auxiliar (9.54) nos defrontaremos com três casos:

**CASO I:** Raízes reais distintas

Se o discriminante da equação (9.54), $\triangle = (a_1 - a_2)^2 - 4a_2a_0$, for maior do que zero, teremos duas raízes reais distintas $m_1$, $m_2$. Dessa maneira, a solução geral de (9.53) é dada por

$$y(x) = c_1x^{m_1} + c_2x^{m_2}.$$

**CASO II:** Raízes reais repetidas

Se, $\triangle = (a_1 - a_2)^2 - 4a_2a_0 = 0$, obtemos apenas uma raiz da equação auxiliar, $m_1 = m_2 = -(a_1 - a_2)/2a_2$ e, neste caso, teremos apenas uma solução de (9.53), dada por $y_1(x) = x^{m_1}$. A outra solução, $y_2(x)$, que seja L.I. com a anterior, nós obtemos usando o método de redução de ordem apresentado na aula 6. Dessa maneira, usando (6.42), obtemos

$$\begin{aligned} y_2(x) &= x^{m_1} \int \frac{e^{-\int \frac{a_1}{a_2 x} dx}}{x^{2m_1}} dx \\ &= x^{m_1} \int \frac{e^{-\frac{a_1}{a_2} ln x}}{x^{2m_1}} dx \\ &= x^{m_1} \int x^{-\frac{a_1}{a_2}} x^{-2m_1} dx = x^{m_1} \int x^{-\frac{a_1}{a_2}} x^{-\frac{2(a_2 - a_1)}{2a_2}} dx \\ &= x^{m_1} \int x^{-1} dx = x^{m_1} ln x. \end{aligned}$$

(Lembre que estamos considerando $x \in I = (0, \infty)$). Portanto, a solução geral para esse caso é

$$y(x) = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_1} ln x,$$

onde $m_1 = \frac{a_2 - a_1}{2a_2}$.

**Observação 9.2.** Não esqueça que para achar a segunda solução, $y_2$, a partir da primeira, $y_1$, devemos colocar a equação de Cauchy-Euler na sua forma normal.

**CASO III:** Raízes complexas

Se $\triangle = (a_1 - a_2)^2 - 4a_2a_0 < 0$, as raízes de (9.54) serão complexas conjugadas, dadas por $m_1 = \alpha + i\beta$ e $m_2 = \alpha - i\beta$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Assim, a solução geral complexa nesse caso é

$$y(x) = c_1 x^{\alpha + i\beta} + c_2 x^{\alpha - i\beta}.$$

Observe que $x^{i\beta} = (e^{lnx})^{i\beta} = e^{i\beta lnx}$, a qual pela fórmula de Euler se reduz a $e^{i\beta lnx} = \cos(\beta lnx) + isen\,(\beta lnx)$. Assim,

$$x^{i\beta} + x^{-i\beta} = 2\cos(\beta lnx)$$

e

$$x^{i\beta} - x^{-i\beta} = 2isen\,(\beta lnx).$$

Como $c_1x^{\alpha+i\beta}+c_2x^{\alpha-i\beta}$ é solução geral de (9.53) e dessa maneira as constantes $c_1$ e $c_2$ são quaisquer, escolhamos duas soluções convenientes de (9.53): uma obtida quando $c_1 = 1 = c_2$ e outra quando $c_1 = 1$ e $c_2 = -1$. Assim, no primeiro caso, obtemos a solução

$$\overline{y}_1 = x^{\alpha+i\beta} + x^{\alpha-i\beta} = x^{\alpha}2\cos(\beta lnx)$$

e no segundo caso, a solução

$$\overline{y}_2 = x^{\alpha+i\beta} - x^{\alpha-i\beta} = x^{\alpha}2isen\,(\beta lnx).$$

Como múltiplo de solução de equação linear homogênea é solução, considere as soluções $\widetilde{y}_1 = \overline{y}_1/2 = x^{\alpha}\cos(\beta lnx)$ e $\widetilde{y}_2 = \overline{y}_2/2i = x^{\alpha}sen\,(\beta lnx)$. Não é difícil provar que $\widetilde{y}_1$ e $\widetilde{y}_2$ são L.I. (use o Wronskiano!), logo a solução geral real de (9.53) é dada por

$$\widetilde{y}(x) = x^{\alpha}[\widetilde{c}_1\cos(\beta lnx) + \widetilde{c}_2sen\,(\beta lnx)].$$

Para resolvermos a equação de Cauchy-Euler não homogênea (9.52) o método dos coeficientes a determinar não pode nos ajudar, uma vez que esse método é aplicado a equações com coeficientes constantes. Dessa maneira, para resolvermos a parte não homogênea da equação de Cauchy-Euler temos que recorrer ao método de variação de parâmetros.

**Exemplo 9.1.** Resolva o P.V.C.

$$2x^2y'' + xy' = x, y(0) = 1, y'(1) = -1.$$

Como se trata de uma equação de Cauchy-Euler (lembre bem o formato das equações de Chauchy-Euler, a sua maior característica é que ela só possui termos onde a potência de $x$ coincide com a ordem da derivada, por exemplo, $x^n y^{(n)}$).

Nesse caso a equação indicial da homogênea associada é

$$2m^2 - m = 0,$$

cujas raízes são $m_1 = 0, m_2 = 1/2$. Assim, a solução geral da equação homogênea associada $2x^2y'' + xy' = 0$, nesse caso, é

$$y_c(x) = c_1 + c_2x^{1/2}.$$

Achemos agora a solução particular da equação não homogênea e só depois de encontrarmos a expressão da solução geral da E.D.O. dada, ou seja, da E.D.O. não homogênea é que substituímos as condições iniciais do problema.

Usando variação de parâmetros (lembre que para aplicar variação de parâmetros a equação deve está na forma normal!), obtemos que $y_p(x) = u_1(x) + u_2(x)x^{1/2}$, onde $u_1$ e $u_2$ são obtidas de

$$u_1' = -1, \; u_2' = x^{-1/2}.$$

Assim, $y_p(x) = -x + 2x = x$ e, portanto uma solução geral para a equação não homogênea é

$$y(x) = c_1 + c_2x^{1/2} + x.$$

Logo, $y(0) = c_1 = 1$ e $y'(1) = c_2/2 + 1 = -1$. Consequentemente, $c_1 = 1$ e $c_2 = -4$. Então, a solução procurada é

$$y(x) = 1 - 4x^{1/2} + x.$$

### 9.2.2 Equação de Cauchy-Euler de ordem superior

Uma equação de Cauchy-Euler de ordem $n$ é da forma

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + \cdots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x), \qquad (9.55)$$

onde $a_n, \cdots, a_1, a_0$ e $a_n \neq 0$ são constantes. A equação homogênea associada

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + \cdots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0, \qquad (9.56)$$

se resolve de modo análogo ao apresentado para o caso de ordem 2. Dessa maneira, $y_m(x) = x^m$ será solução de (9.56) se, e somente se, $m$ for raiz da equação auxiliar

$$a_n m(m-1)(m-2).\cdots.(m-n+1) + a_{n-1}m(m-1).\cdots.(m-(n-1)+1)$$

$$+a_2 m(m-1) + a_1 m + a_0 = 0.$$

Aqui segue a análise do caso anterior. Se, por exemplo, $n = 10$ e ao resolvermos a equação auxiliar acima, encontrarmos 5 raízes repetidas $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5$, 4 raizes complexas conjugadas $m_6 = \alpha + i\beta, m_7 = \alpha - i\beta, m_8 = \overline{\alpha} + i\overline{\beta}, m_9 = \overline{\alpha} - i\overline{\beta}$ e 1 raiz real, $m_{10}$. Essas raízes corresponderão, respectivamente, as soluções

$$y_1(x) = x^{m_1}, y_2(x) = x^{m_1} lnx, y_3(x) = x^{m_1}(lnx)^2,$$

$$y_4(x) = x^{m_1}(lnx)^3, y_5(x) = x^{m_1}(lnx)^4,$$

as quais são funções L.I.,( para provar essa afirmação calcule o Wronskiano dessas funções) e,

$$y_6(x) = x^{\alpha}\cos(\beta lnx), y_7(x) = x^{\alpha} sen\,(\beta lnx);$$

$$y_8(x) = x^{\overline{\alpha}}\cos(\overline{\beta} lnx), y_9(x) = x^{\overline{\alpha}} sen\,(\overline{\beta} lnx)$$

e, finalmente

$$y_{10} = x^{m_{10}}.$$

Portanto teremos a solução geral

$$
\begin{aligned}
y(x) \quad &= c_1x^{m_1} + c_2x^{m_1}lnx + c_3x^{m_1}(lnx)^2 + c_4x^{m_1}(lnx)^3 \\
&+c_5x^{m_1}(lnx)^4 + x^{\alpha}[c_6\cos(\beta lnx) + c_7sen\,(\beta lnx)]+ \\
&x^{\overline{\alpha}}[c_8\cos(\overline{\beta}lnx) + c_9sen\,(\overline{\beta}lnx)] + c_{10}x^{m_{10}}.
\end{aligned}
$$

**Observação 9.3.** A equação (9.56) pode ser transformada em uma equação linear homogênea com coeficientes constantes, para isso basta fazer a mudança de coordenadas $u = lnx$ ($u$ será a nova variável independente) e, portanto, pode ser resolvida pelos métodos apresentados na aula 7.

## 9.3 Conclusão

Na aula de hoje, vimos como podemos resolver as equações de Cauhy-Euler, as quais, por meio de uma mudança de coordenadas, podem ser reduzidas a equações lineares com coeficientes constantes. Dessa maneira, podemos optar resolvê-las pelas técnicas apresentadas nas aulas 7 e 8 ou pelas técnicas apresentadas na aula de hoje.

## RESUMO

..

Na aula de hoje aprendemos uma técnica para resolução de um tipo especial de equações lineares com coeficientes constantes: equação de Cauchy-Euler. Nessa técnica, o método para resolvermos a parte homogênea é muito semelhante ao método apresentado na aula 7, uma vez que temos que achar as raízes da equação indicial associada a equação homogênea.

## PRÓXIMA AULA

..

Em nossa próxima aula veremos como resolver equações lineares com coeficientes variáveis por meio de séries de potências.

## ATIVIDADES

..

**Atividade. 9.1.** Resolva as EDO's lineares não homogênea.

a)$xy'' + y' = x$

b) $2x^2y'' + 5xy' + y = x^2 - x$.

## LEITURA COMPLEMENTAR

..

BRAUM, Martin, Differential Equations and their applications. Springer, 1992.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes, Equações Diferenciais Aplicadas. Coleção matemática universitária. IMPA, 2007.

ZILL, Dennis G., Equações Diferenciais com aplicações em modelagem. Thomson, 2003.

## 9.4 Referências Bibliográficas

KREIDER, KULLER, OSTBERG, Equações Diferenciais, USP, 1972.

ZILL, Dennis G., Equações Diferenciais com aplicações em modelagem. Thomson, 2003.